

Matematică

**- exerciții și probleme -
pentru clasa a VI-a**

CUPRINS

Teste inițiale	7
----------------------	---

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerică. Relația dintre un element și o mulțime	11
2. Relații între mulțimi	16
3. Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	23
4. Operații cu mulțimi	25
Teste de evaluare	33
5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	34
6. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c). Numere prime între ele.....	38
7. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c).....	42
8. Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}	45
Teste de evaluare	46

Capitolul II. Rapoarte și proporții

1. Rapoarte.....	48
2. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor. Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție.....	52
3. Proporții derivate.....	54
4. Șir de rapoarte egale.....	57
5. Mărimi proporționale. Regula de trei simplă	58
6. *Regula de trei compusă (Extindere)	67
7. Elemente de organizare a datelor	68
8. Probabilități	72
9. Probleme cu caracter practic	73
Teste de evaluare	75

Capitolul III. Numere întregi

1. Mulțimea numerelor întregi. Opușul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi.....	77
2. Modulul sau valoarea absolută a unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	80
3. *Reprezentarea unui punct având coordonate numere întregi, într-un sistem de axe perpendiculare (Extindere).....	83
4. Adunarea numerelor întregi. Proprietăți.....	86
5. Sumă algebrică	88
6. Scăderea numerelor întregi.....	90
7. Înmulțirea numerelor întregi	93
8. Împărțirea numerelor întregi	97
9. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul.....	100
10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	102
11. Ecuații în mulțimea numerelor întregi.....	104
12. Inecuații în mulțimea numerelor întregi.....	106
13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor	108
Teste de evaluare	109
Fișă recapitulativă	110

Capitolul IV. Mulțimea numerelor raționale

1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale	113
2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opușul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale.....	118
3. Adunarea numerelor raționale. Proprietăți	123
4. Scăderea numerelor raționale	128
5. Înmulțirea numerelor raționale	131
6. Împărțirea numerelor raționale	135
7. Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri.....	137
8. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	142
9. Ecuații în mulțimea numerelor raționale	145
10. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	148
Teste de evaluare	151

Capitolul I. Noțiuni geometrice fundamentale

1. Unghiuri opuse la vârf.....	153
2. Unghiuri formate în jurul unui punct	156
3. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare.....	158
4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi.....	160
Teste de evaluare	165
5. Unghiuri determinate de două drepte cu o secantă	167
6. Drepte paralele. Axioma paralelelor.....	170
7. Criterii de paralelism.....	175
Teste de evaluare	177
8. Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă	179
9. Mediatoarea unui segment.....	185
10. Simetria față de o dreaptă.....	188
Teste de evaluare	191
11. Cercul	192
12. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.....	197
Test de evaluare.....	200

Capitolul al II-lea.Triunghiul

1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare, perimetru.....	201
2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi.....	204
3. Construcția triunghiurilor	208
4. Inegalități între elementele triunghiului	210
Teste de evaluare	213
5. Linii importante în triunghi	214
5.1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris într-un triunghi	214
5.2. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi	216
5.3. Înălțimile unui triunghi.....	217
5.4 Medianele unui triunghi	219
5.5. *Linia mijlocie a unui triunghi (Extindere).....	221
Teste de evaluare	223
6. Congruența triunghiurilor oarecare.....	224
7. Congruența triunghiurilor dreptunghice	228

8. Metoda triunghiurilor congruente	230
Probleme cu caracter practic	235
Teste de evaluare	236
9. Proprietățile triunghiului isoscel.....	237
10. Proprietățile triunghiului echilateral.....	241
11. Proprietățile triunghiului dreptunghic.....	243
Teste de evaluare	248
Subiecte pentru teză. Semestrul I.....	250
Subiecte pentru teză. Semestrul al II-lea.....	252

Probleme pentru pregătirea concursurilor

Algebră	254
Geometrie	255
Răspunsuri	258

Testul 1

Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute. Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I. Scrieți răspunsul corect.

(45 de puncte)

1. Rezultatul calculului $36 - 3 \cdot 8$ este:

- A. 264; B. 60; C. 12; D. 4. 5p

2. Numărul $\overline{347x}$ se divide cu 5 dacă cifra x este egală cu:

- A. 1; B. 5; C. 2; D. 6. 5p

3. Suma numerelor $a = \frac{1}{4}$ și $b = \frac{5}{6}$ este:

- A. $\frac{6}{10}$; B. $\frac{13}{12}$; C. $\frac{6}{4}$; D. $\frac{7}{12}$. 5p

4. Dacă $2^x = 16$, atunci x este egal cu:

- A. 14; B. 8; C. 4; D. 18. 5p

5. Frația $\frac{12}{18}$ devine ireductibilă dacă se simplifică cu:

- A. 6; B. 2; C. 3; D. 30. 5p

6. Un pătrat are latura cu lungimea de 6 cm. Perimetrul său este egal cu:

- A. 12 cm; B. 36 cm; C. 18 cm; D. 24 cm. 5p

7. Media aritmetică a trei numere este egală cu 2,5. Suma numerelor este egală cu:

- A. 5,5; B. 2,8; C. 6,5; D. 7,5. 5p

8. Dacă fracțiile $\frac{x}{8}$ și $\frac{3}{4}$ sunt echivalente, atunci x este egal cu:

- A. 6; B. 7; C. 1; D. 15. 5p

9. Dacă transformăm $12,5 \text{ m}^2$ în cm^2 obținem:

- A. 125 cm^2 ; B. 125000 cm^2 ; C. $0,125 \text{ cm}^2$; D. 1250 cm^2 . 5p

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete.

(45 de puncte)

1. Calculați: $2^{12} : 2^5 + (3^3)^2 - 57$. 9p

2. Un costum costă 540 de lei și valoarea stofei necesară confecționării lui reprezintă 75% din valoarea costumului. Cât a costat stofa costumului? 9p

3. Aflați numărul natural x dacă $0,2x + 1 = 6$. 9p4. Demonstrați că suma $\overline{ab} + \overline{ba} + 132$ se divide cu 11. 9p

5. Distanța dintre localitățile A și B este de 60 km și este parcursă de un călător în trei zile astfel: în prima zi parcurge pe jos 1240 dm, în ziua a doua parcurge cu bicicleta 366 hm. Câți km îi rămân de parcurs pentru ziua a treia? 9p

Testul 2

Timpul de lucru efectiv este de 50 de minute. Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I. Scrieți răspunsul corect.**(45 de puncte)****1.** Rezultatul calculului $27 - 7 \cdot 2$ este:

- A. 10; B. 14; C. 13; D. 22. **5p**

2. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 5; 6\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Atunci intersecția mulțimilor A și B este:

- A. $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; B. $\{1; 2; 6\}$; C. $\{4; 12\}$; D. \emptyset . **5p**

3. Produsul numerelor $a = 10\frac{2}{3}$ și $b = \frac{9}{4}$ este:

- A. $\frac{128}{27}$; B. $\frac{128}{27}$; C. 24; D. $\frac{8}{3}$. **5p**

4. Câtul împărțirii numărului 2301 la numărul 47 este:

- A. 58; B. 48; C. 84; D. alt număr. **5p**

5. Transformat în fracție ordinară ireductibilă, numărul 13,4 este:

- A. $\frac{67}{5}$; B. $\frac{3}{2}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $\frac{11}{3}$. **5p**

6. Media aritmetică a numerelor $a = 3,5$ și b este 3,6. Atunci numărul b este:

- A. 37; B. 3,7; C. 3,9; D. 3,4. **5p**

7. Perimetrul unui dreptunghi cu lățimea de 15 cm și lungimea dublul lățimii este:

- A. 45 cm; B. 60 cm; C. 30 cm; D. 90 cm. **5p**

8. Transformată în centimetri, distanța de 4,123 m este:

- A. 41,23 cm; B. 412,3 cm; C. 4123 cm; D. 0,04123 cm. **5p**

9. Rezultatul calculului $\frac{18}{11} + \frac{4}{11}$ este:

- A. 1; B. 2; C. 1,2; D. 2,(23). **5p**

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete.**(45 de puncte)****1.** Calculați $2014^0 + 1^{2013} + 2^3$. **9p****2.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $3x - 0,2 = 8,8$. **9p****3.** După ce a cheltuit $\frac{9}{10}$ din bani, Aura a rămas cu 20 de lei. Ce sumă a avut Aura la început? **9p****4.** Un dreptunghi are lungimea de 16 cm și lățimea de 4 cm. Aflați lungimea laturii unui pătrat care are aria egală cu aria dreptunghiului. **9p****5.** Adela are 15 lei. Câte pachete de biscuiți poate cumpăra, dacă vrea să mai rămână cu 6 lei în buzunar? Un pachet de biscuiți costă 1,5 lei. **9p**

Timpu de lucru efectiv este de 45 de minute. Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I. Scrieți răspunsul corect.**(45 de puncte)**

- 1.** Rezultatul calculului $12 - 2^3$ este:
A. 6; B. 3; C. 1000; D. 4. **5p**
- 2.** Restul împărțirii $\overline{137x} : 2$ este egal cu 1, dacă cifra x este egală cu:
A. 2; B. 8; C. cifră impară; D. orice cifră pară. **5p**
- 3.** Scrierea ca fracție zecimală a numărului rațional $a = \frac{7}{6}$ este:
A. 1,16; B. 1,1(7); C. 1,(6); D. 1,(16). **5p**
- 4.** Dacă $1^x = 1$, atunci x este egal cu:
A. doar 1; B. doar număr par; C. numai 0; D. orice număr natural **5p**
- 5.** Frația $\frac{7}{5}$ este echivalentă cu fracția $\frac{a}{10}$ dacă a este egal cu:
A. 70; B. 14; C. 5; D. 140. **5p**
- 6.** Un pătrat are latura de 3 cm. Perimetrul său se mărește de 5 ori dacă latura sa se mărește de:
A. 15 ori; B. 5 ori; C. 60 de ori; D. 4 ori. **5p**
- 7.** Media aritmetică a numerelor: 7, 11 și 48 este egală cu:
A. 3; B. 66; C. 33; D. 22. **5p**
- 8.** Cel mai mare rest la împărțirea unui număr cu 8 este egal cu:
A. 8; B. 7; C. 9; D. nu se poate stabili. **5p**
- 9.** Dacă transformăm 3,1 hm în cm, obținem:
A. 31000 cm; B. 310 cm; C. 0,00031 cm; D. 3100 cm. **5p**

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete.**(45 de puncte)**

- 1.** Calculați: $3^0 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$. **9p**
- 2.** 7 caiete costă 10,50 lei. Cât rest primește din 50 de lei un elev care cumpără 12 caiete de același fel? **9p**
- 3.** Care este soluția inecuației $2x + 2,5 < 7$ în mulțimea numerelor naturale? **9p**
- 4.** Un călător parcurge în prima zi 17 km, în a doua zi merge cu 14 km mai mult, iar în a treia zi cu 13 km mai mult decât în primele două zile la un loc. Câți kilometri a parcurs în total? **9p**
- 5.** Calculați volumul unei cutii în formă de paralelipiped dreptunghic, care are dimensiunile de 36 cm, 24 cm, respectiv 15 cm. **9p**

Capitolul I. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Organizator

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerică.
Relația dintre un element și o mulțime
2. Relații între mulțimi
3. Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale
4. Operații cu mulțimi
Teste de evaluare
5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime
6. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c). Numere prime între ele
7. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)
8. Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}
Teste de evaluare

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerică. Relația dintre un element și o mulțime

Noțiuni de teorie

Definiție: **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte, numite **elementele mulțimii**.

Observație: Mulțimile se notează cu litere mari de tipar (A, B, C, \dots), iar elementele acestora se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Modalități de definire a mulțimilor:

1. Prin enumerarea tuturor elementelor

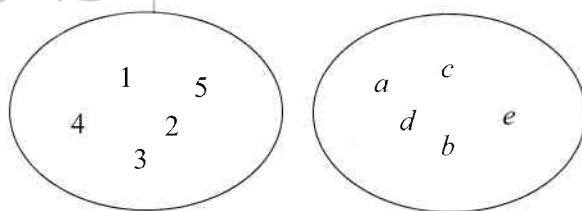
Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

2. Enunțând o proprietate comună elementelor mulțimii

Exemplu: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x : 2\}$

3. Cu ajutorul diagramei Venn-Euler

Exemplu:



Definiție: Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează \emptyset .

Observații: Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi „ x aparține mulțimii A ”.
Dacă x nu este un element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „ x nu aparține mulțimii A ”.

Să rezolvăm!

*

1. Scrieți prin enumerare:

- Mulțimea literelor folosite la scrierea cuvântului „bibliotecă”;
- Mulțimea literelor prin care se redau vocalele din limba română;
- Mulțimea cifrelor numărului 1034073;
- Mulțimea numerelor naturale de o cifră, divizibile cu 3;
- Mulțimea numerelor naturale cuprinse între 5 și 11;
- Mulțimea cifrelor impare;
- Mulțimea numerelor de două cifre identice.

2. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \mid x \text{ este țară vecină cu România}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\},$$

$$C = \{x \mid x \text{ este număr natural prim și par}\},$$

$$D = \{x \mid x \text{ este lună a anului care are 31 de zile}\}.$$

Scrieți mulțimile A , B , C , D , enumerând elementele.

3. Scrieți mulțimile următoare, enunțând o proprietate comună elementelor lor:

$$a) A = \{0, 2, 4, 6, 8\};$$

$$b) A = \{0, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\};$$

$$c) A = \{1, 2, 3, 6\};$$

$$d) A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}.$$

4. Reprezentați mulțimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ folosind diagrama Venn-Euler.

5. D_8 reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului 8. Reprezentați această mulțime:

- prin enumerarea elementelor;
- scriind o proprietate caracteristică elementelor folosind simbolurile matematice;
- folosind diagrama Venn-Euler.

6. Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ în toate modurile posibile, inversând locul elementelor.

7. Este corect scrisă mulțimea $A = \{0 + 1, 0 + 2, 0 + 3, 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3\}$? Justificați!

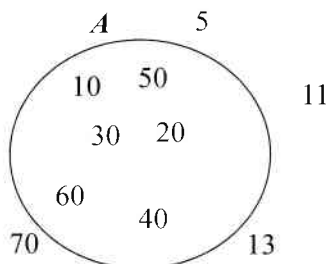
8. Citiți următoarele propoziții:

- $2 \in A$;
- $3 \notin M$;
- $7 \in \{1, 2, 7, 8, 9\}$;
- $8 \notin \{0, 1, 2, 3\}$;
- $a \in \emptyset$.

9. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- Căror mulțimi le aparține elementul 0? Scrie aceste relații folosind simbolurile matematice.
- În câte mulțimi se găsește elementul 3?
- Care sunt elementele comune mulțimilor A și B ?
- Ce elemente se găsesc în A și nu se găsesc în B ?
- În care dintre mulțimi nu se află elementul 9? Scrie aceste relații folosind simbolurile matematice.

10. a) Scrieți toate relațiile de apartenență potrivite diagramei alăturată (ex.: $10 \in A$, $11 \notin A$)



b) Scrieți mulțimea A enunțând o proprietate caracteristică elementelor sale.

11. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 5, 8\}$ și $B = \{0, 2, 7, 9\}$. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | |
|-------------------|--------------------------------|--|
| a) $2 \in B$; | d) $2^3 \in A$; | g) $8 \in A$ sau $7 \notin B$; |
| b) $1 \notin A$; | e) $1 \in A$ și $7 \in B$; | h) $1 \notin B$ sau $2 \notin A$; |
| c) $7^0 \in B$; | f) $2 \notin A$ și $0 \in B$; | i) $0 \in A$ și $0 \notin \emptyset$. |

12. Mulțimile A , B , C și D au ca elemente literele cuvintelor: „rural” (mulțimea A), „caramela” (mulțimea B), „arme” (mulțimea C) și „mare” (mulțimea D).

- Scrieți mulțimile A , B , C , D , enumerând elementele.
- Câte elemente are fiecare mulțime?
- Precizați elementele mulțimii A care nu aparțin lui B și elementele mulțimii B care nu aparțin mulțimii A . Faceți același lucru pentru mulțimile C și D . Există un element în mulțimea D care nu este în C ? Scrie aceste relații folosind simbolurile matematice.
- Precizați trei cuvinte ale căror litere să fie elemente ale mulțimii C .

13. Fie A mulțimea literelor cuvântului „academic” și B mulțimea silabelor aceluiași cuvânt.

- Silaba „de” este un element al mulțimii A ? Dar al mulțimii B ?
- Litera „c” este un element al mulțimii A ? Dar al mulțimii B ?
- Există un element comun mulțimilor A și B ?
- Scrieți rezultatele obținute la punctele anterioare folosind simbolurile matematice.

14. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 1 < x \leq 200\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|
| a) $7 \in A$; | d) $3^2 \in A$; | g) $3 \in \emptyset$; |
| b) $1 \in A$; | e) $300 \in A$; | h) $(72 : 3) \in A$; |
| c) $0 \notin A$; | f) $200^0 \in A$; | i) $(2^5 \cdot 2^2) \in A$. |

15. Enumerați elementele mulțimilor:

- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 3\}$;
- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 1 \leq x < 5\}$;
- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 20 < x < 25\}$;
- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x < 1\}$.

16. Determinați cea mai mare și cea mai mică diferență dintre două elemente ale mulțimii $A = \{0, 1, 3, 7\}$.

17. Scrieți mulțimea A , știind că are 3 elemente și: $0 \notin A$, $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \notin A$, $8 \notin A$, $10 \notin A$, $5 \in A$.

18. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- $4 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ divide } 12\}$;
- $214 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x : 3\}$;
- $81^2 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x : 3\}$;
- $7 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 1 \leq x < 7\}$.

19. În tabelul de mai jos sunt prezentate mediile la matematică ale unor elevi de clasa a VI-a.

Nume elev	Irina	George	Mihai	Ionel	Aura	Elena	Maria	Bogdan
Nota	8	9	10	10	8	9	7	8

- Scrieți mulțimea elevilor folosind enumerarea elementelor.
- Scrieți mulțimea mediilor la matematică obținute de cei 8 elevi cu ajutorul diagramei Venn-Euler.
- Scrieți mulțimea elevilor din tabel cu medii mai mari decât 8.

20. În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii înregistrate timp de o săptămână.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura($^{\circ}\text{C}$)	27	29	31	29	33	36	35

- Scrieți mulțimea temperaturilor înregistrate.
- Scrieți mulțimea zilelor săptămânii în care temperatura a fost mai mică de 30°C .
- Scrieți mulțimea zilelor săptămânii în care temperatura a fost cuprinsă între 31°C și 35°C .

28. Se consideră mulțimea:

$$A = \{x \mid x = \overline{abc} \text{ și } a+b+c = 7, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt cifre în baza } 10\}.$$

- Numărul 321 aparține mulțimii A ? Dar numărul 2302?
- Câte elemente din A se divid cu 3?
- Determinați cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii A .

29. Se consideră mulțimea:

$$A = \{x \mid x = \overline{abc} \text{ și } abc = 12, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt cifre în sistemul zecimal}\}.$$

Care dintre numerele 620, 234, 3141, 126, 314, 430, 120 sunt elemente ale mulțimii A ? Scrieți relația dintre toate elementele de mai sus și mulțimea A folosind simbolurile matematice.

30. Determinați numărul natural n , știind că $7 \in \{2n + 3, 4n - 2\}$.

31. Scrieți elementele comune mulțimilor $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 10 \leq x < 100\}$ și

$$B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} + \overline{ba} = 55, a \text{ și } b \text{ sunt cifre nenule în baza } 10\}.$$

32. O mulțime are 11 elemente, numere naturale. Dacă suma acestora este 55, aflați produsul lor.

* * *

33. Calculați suma elementelor mulțimii:

- $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 100\}$;
- $A = \{1, 4, 7, 10, \dots, 91\}$;
- $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{19}\}$.

34. Determinați mulțimea $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{21}{2x-7} \in \mathbb{N}\right\}$.

35. Determinați cel mai mare element al mulțimii:

$$A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{10}{2x-3} \text{ și } \frac{3x+4}{15} \text{ sunt simultan supraunitare}\right\}.$$

36. Verificați dacă 5 aparține mulțimii:

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 1 + 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^9) > 3^{2x}\}.$$

2. Relații între mulțimi

Noțiuni de teorie

Egalitatea

Definiție: Două **mulțimi** A și B sunt **egale** dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.

Definiție: Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține mulțimii B sau invers, mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

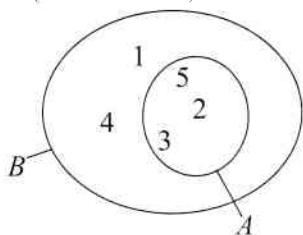
Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq x < 4\}$, $C = \{2, 3\}$

$$A = B \text{ și } A \neq C$$

Incluziunea

Definiție:

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B (notăm $A \subset B$) dacă orice element al mulțimii A aparține mulțimii B . Se poate spune și că mulțimea B include mulțimea A (notăm $B \supset A$). În acest caz, A este o submulțime a mulțimii B .



$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$$A \subset B$$

Mulțimea tuturor submulțimilor lui A se numește **mulțimea părților mulțimii** A și se notează $P(A)$.

Observație:

Dacă mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B , notăm $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$.

Exemplu: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$

a) $A \not\subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $C \not\subset A$, $C \not\subset B$, $B \not\subset A$

b) $A \not\supset B$, $A \not\supset C$, $B \not\supset C$, $B \not\supset A$, $C \supset A$, $C \supset B$

c) Elementele mulțimii $P(B)$ sunt:

$$\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 5, 6\}.$$

Observații:

1. Se consideră că \emptyset este submulțime a oricărei mulțimi.
2. Orice mulțime este inclusă în ea însăși (relația de incluziune e reflexivă).
3. Dacă A și B sunt două mulțimi astfel încât $A \subset B$ și $B \supset A$, atunci $A = B$ (relația de incluziune e simetrică).
4. Dacă A , B și C sunt trei mulțimi astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$ (relația de incluziune e tranzitivă).

Să rezolvăm!

★

1. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Precizați care dintre următoarele enunțuri este corect scris:

a) $2 \in A$;

b) $\{0\} \in A$;

c) $\{1, 2, 3\} \subset A$;

d) $A \supset \{3, 4\}$;

e) $\{3\} \notin A$;

f) $5 \notin A$;

g) $\{5\} \notin A$;

h) $\{0, 1, 2, 3\} \supset \{0, 1\}$;

i) $\{0\} \subset \emptyset$;

j) $\{\emptyset\} \subset A$;

k) $\{0, 1\} \not\subset A$;

l) $\{1, 2, 3\} \not\supset A$;

m) $0 \subset A$;

n) $1 \supset \{0, 1\}$;

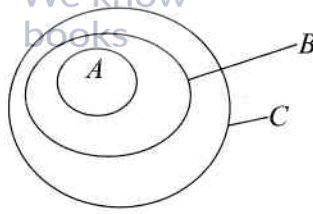
o) $\{2, 1\} \supset 1$;

p) $\{2, 1\} \supset \{1\}$;

q) $\{1, 2\} \in \{0, 1, 2, 3\}$;

r) $\{1, 2, 3\} \notin A$.

2. În desenul alăturat sunt reprezentate mulțimile A , B și C .



Stabiliți propozițiile adevărate:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $A \subset B$; | f) $C \supset A$; | k) $A \supset B$ și $B \subset C$; |
| b) $B = C$; | g) $A \not\subset B$; | l) $A \subset B$ sau $C \subset B$; |
| c) $B \supset C$; | h) $C \not\subset B$; | m) $\emptyset \subset A$ și $B \subset C$; |
| d) $B \subset C$; | i) $A \neq B$; | n) $B \supset \emptyset$ sau $B = C$; |
| e) $\emptyset \subset A$; | j) $A \subset B$ și $B \subset C$; | o) $A = B$ sau $A = C$. |

3. Precizați propozițiile false:

- | | | |
|---|--------------------------|--|
| a) $\{1, a, 3\} = \{a, 3, 1\}$; | b) $\{1\} = \{1, 0\}$; | c) $\{4, 7\} \neq \{4, 8, 7\}$; |
| d) $\{4, 5, 6, 7\} \subset \{4, 5, 6\}$; | e) $\{0\} = \emptyset$; | f) $\{3, 8, 7\} \supset \{3, 7, 8\}$; |
| g) $\{2, 8, 4\} \neq \{2^1, 2^2, 2^3\}$; | | |
| h) $\{3^0, 3^{0+1}, 3^{0+2}\} = \{1, 6, 3\}$; | | |
| i) {măsura unui unghi drept, măsura unui unghi alungit, măsura unui unghi nul} = $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$; | | |
| j) $\{6, 8, 10\} \subset \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ este cifră pară}\}$; | | |
| k) $\{0\} \supset \emptyset$. | | |

4. Ilustrați cu ajutorul diagramelor Venn-Euler relațiile dintre mulțimile următoare:

- a) $A \subset B$; b) $C \supset D$; c) $\{a, b, c, d\} \subset \{a, b, c, d, e, f\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\} \supset \{2, 3\}$.

5. Scrieți mulțimea părților mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.

6. Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{0, 3, 5\}$.

7. Scrie două submulțimi cu câte patru elemente ale mulțimii numerelor naturale.

8. Scrie o submulțime cu trei elemente a mulțimii numerelor raționale pozitive.

9. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 6\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate: a) $A \neq B$; b) $A \subset B$; c) $B \subset A$; d) $A = B$?

10. Stabiliți dacă mulțimea B este o submulțime a mulțimii A în fiecare dintre cazurile:

- | | |
|--|--|
| a) $B = \{2, 3, 5\}$, $A = \{2, 3, 6\}$; | e) $B = \emptyset$, $A = \{1, a, 2, b\}$; |
| b) $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; | f) $B = \{4, 5, 6\}$, $A = \{4, 5, 7, 8, 9\}$; |
| c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 0, 3, 1, 4\}$; | g) $B = \{2, 3, 4\}$, $A = \emptyset$. |
| d) $B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$; | |

11. Se consideră mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 7, 9, 10, 12, 17\}, B = \{7, 10, 17\}, C = \{2, 7, 10, 11, 12\}, \\ D = \{2, 3, 7, 8, 9, 10\}, E = \{7, 10, 12, 17\}, F = \emptyset.$$

Care dintre mulțimile B, C, D, E, F este submulțime a mulțimii A ?

12. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \mid x \text{ este măsura unui unghi ascuțit}\}, B = \{60^\circ, 25^\circ, 90^\circ, 70^\circ\},$$